FICHE D'EXERCICE SUR LES PRIMITIVES

Exercice 1

A. Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

(1) $f(x)=x^3+x^2+3$ (2) $f(x)=(2x-1)^3$ (3) $f(x)=(-2x+3)(x-1)$

(4) $f(x)=x^4+x^2-1$ (5) $f(x)=5(2x+1)^{14}$ (6) $f(x)=(x^3-3x^2+1)^3$

B. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur l'intervalle **K** de la fonction f.

(1) $f(x)=x^3-x^2+\frac{1}{x^2}-2$ **K** $=]0;+\infty[$ (2) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ **K** $=]1;+\infty[$

(1) $f(x)=\frac{2x^3+3x^2+4}{x^2}$ **K** $=]0;+\infty[$ (4) $f(x)=\frac{1-x^2}{x^4}$ **K** $=]0;+\infty[$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive sur l'intervalle **K** de la fonction f qui prend la valeur y_0 en x_0.

(1) $f(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}}$ $]0;+\infty[$ $x_0=1$ $y_0=0$

(2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ $]\frac{1}{2};+\infty[$ $x_0=2$ $y_0=-1$

(3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$ $]0;+\infty[$ $x_0=4$ $y_0=1$

(4) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$ $]-\frac{1}{2};+\infty[$ $x_0=0$ $y_0=2$

Exercice 3

On donne la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x}{(x^2-4)\sqrt{8-2x^2}}$ sur $]-2;2[$.

Soit $g(x)=\sqrt{8-2x^2}$ et $h(x)=\frac{1}{x^2-4}$.

1- Calculez pour $x\in]-2;2[$, $g'(x)\cdot f(x)+f'(x)\cdot g(x)$ et montrez que $f(x)=g'(x)\cdot f(x)+f'(x)\cdot g(x)$.

2- En déduire une primitive sur $]-2;2[$ de f.

Exercice 3

On donne g, la fonction définie par $g(x)=\frac{x^2-4}{x^2+x+5}$.

Soit f la primitive sur $\mathbb{R}$ de g qui s'annule en 0. Donnez les variations de f sur $\mathbb{R}$.

MATHEMATIQUES GENERALES

Exercice 1

On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$.

1- a) Calculer $P(3)$, puis écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du 1er degré.

   b) En déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

2- Etudier le signe de $P(x)$ suivant le valeurs de x.

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2e^{3x} - 7e^{2x} + 2e^x + 3 \geq 0$.

Exercice 2

Votre établissement doit assister à la remise des prix de l'excellence à la présidence. La délégation est constituée de trois personnes composée comme suit :

- Un chef de délégation choisi parmi les membres de l'administration au nombre de 5
- Un représentant des enseignants choisi parmi 10 enseignants
- Un représentant des élèves choisi parmi 20 élèves.

1) Calculer le nombre de délégations différentes que l'on peut constituer.
2) Parmi les membres de l'administration, il y a exactement 2 dames. Parmi les 20 élèves il y a exactement 7 demoiselles. Parmi les enseignants il y a exactement 3 dames.
   a- Calculer le nombre de délégation ne contenant aucune personne de sexe féminin.
   b- Calculer le nombre de délégation ne contenant aucune personne de sexe masculin.
   c- Calculer le nombre de délégation contenant des personnes de sexes différents
   d- Calculer le nombre de délégation ne contenant au moins une femme.

Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^x - x$.

1- Calculer la limite de g en $+\infty$ et en 0.
2- Déterminer l'expression $g'(x)$ de la fonction dérivée de g.
3- Dresser le tableau de variation de g puis en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{e^x} + lnx$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique : 4 cm.

1- Démontrer que $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{xe^x}$.
2- a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3- Donner le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4- Démontrer que f est une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur un ensemble qu'on précisera.
5- Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\propto$ dans $]0{,}5\,;\,0{,}6[$.

TD N° 1 : CALCUL MATRICIEL

EXERCICE 1 :

Calculer les produits de matrices suivants :

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 :

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calculer les produits AB et BA

EXERCICE 3 :

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer lorsque cela est possible, les produits matriciels suivants : AB ; BA ; CB ; A^2 ; CA B ; CA ; B^2

EXERCICE 4 :

Calculer A^2 où $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 5 :

Soient les matrices suivantes : $M(a) = \begin{pmatrix} 4+a & 1+a \\ -2 & -5a \end{pmatrix}$ et $N(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+a \\ -1+a & 1+2a \end{pmatrix}$

Pour quelles valeurs du réel a, les matrices $M(a)$ et $N(a)$ sont-elles inversibles ?

EXERCICE 6 :

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On pose : $B = A - I$

Calculer B^n pour $n \in IN$ et en déduire l'expression de A^n.

EXERCICE 7 :

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $(A+I)^3$
2) En déduire que : A est inversible et donner son inverse A^{-1}.

EXERCICE 8 :

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 et A^3 .
2) Trouver trois nombres réels a, b et c tels que : $A^3 + aA^2 + bA + cI = O$
3) En déduire que : A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

EXERCICE 9 :

Soit a un nombre réel quelconque et la matrice M_a=$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2a & 2 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer dét (M_a).
2) Pour quelles valeurs de a, la matrice M_a est-elle inversible ?
3) Lorsque la matrice M_a est inversible, déterminer son inverse ${M_a}^{-1}$.

EXERCICE 10 :

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) On pose : $B = 4A - A^2$, déterminer la matrice B
2) Calculer le produit AB
3) En déduire que : A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}

EXERCICE 11 :

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes : $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer B^2 et vérifier que : $B^3 = \begin{pmatrix} 113 & 96 & 112 \\ 48 & 41 & 48 \\ 168 & 144 & 169 \end{pmatrix}$
2) Calculer la matrice : $B^3 - 8B^2 + 8B$
3) En déduire que la matrice B est inversible, puis donner l'expression son inverse A^{-1} en fonction de B et I.

EXERCICE 12 :

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour tout réel x, on pose : $K = A - xI$ et $P(x) = dét(K)$

1) calculer K et $P(x)$
2) Calculer A^2 et A^3
3) On pose : $B = -A^2 + 4A + I$ et $C = -A^3 + 4A^2 + A - 4I$
   a) Calculer B et C
   b) En déduire que la matrice A est inversible et trouver son inverse A^{-1}.

EXERCICE 13 :

I°/ On considère la fonction f est définie par : $f(x) = -x^3 + 5x^2 + x - 5$

1) Calculer $f(1)$
2) Factoriser $f(x)$.

II°/ On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On désigne par m la matrice définie par : $M = A - xI$

1) Calculer le déterminant de la matrice M.
2) Pour quelle valeur de x, la matrice m est-elle inversible ?
3) Calculer A^2 et A^3 , puis trouver la matrice N définie par : $N = -A^3 + 5A^2 + A - 5I$
4) En déduire que a est inversible et donner son inverse A^{-1}

EXERCICE 14 :

On considère la matrice : $A_m = \begin{pmatrix} 7-m & -2 & 0 \\ -2 & 6-m & -2 \\ 0 & -2 & 5-m \end{pmatrix}$

On pose : $f(m) = dét(A_m)$

1) Calculer $f(m)$ en fonction de m
2) a) vérifier que $f(3) = 0$ et déterminer les autres racines de $f(m)$.
   b) Quelles sont les valeurs de m pour les quelles la matrice A_m est –elle inversible ?
   c) Déduire des résultats précédents que la matrice A_0 est inversible et déterminer son inverse ${A_0}^{-1}$.

EXERCICE 15 :

On considère les matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ où α est un nombre réel et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Pour quelles valeurs de α, la matrice H est-elle inversible ?
2) On pose $\alpha = 0$. Calculer $H^2 - H - 2I$, puis déterminer l'inverse H^{-1}

EXERCICE 16:

Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2
2) Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que : $A^2 = xA + yI$
3) En déduire en notant que : $A = AI$, qu'il existe une matrice B telle que : $AB = I$

EXERCICE 17:

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice carrée unité d'ordre 3 .

A tout réel x , on associe la matrice $M(x)$ définie par la relation : $M(x) = I + xA + \left(\frac{x^2}{2}\right)A^2$ (1)

1) Calculer A^2 et A^3 ; en déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $A^n = 0$.
2) En utilisant la relation (1) et en développant le produit $M(x).M(y)$, montrer que quels que soient les réels x et y, on a : $M(x).M(y) = M(x+y)$
3) a-) vérifier que : $(M(x))^2 = M(2x)$ et établir par récurrence que : pour tout entier naturel non nul, $(M(x))^n = M(nx)$
   b-) Exprimer en fonction de I, A^2 et A^3 les matrices $M(x)$ et $M(nx)$
   c-) En déduire les expressions des matrices $M(x)$ et $(M(x))^n$ sous forme de tableaux.

EXERCICE 18 :

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) a. Déterminer la matrice J telle que : $\mathrm{A} = \mathrm{I} + \mathrm{J}$, puis calculer J^2 , J^3 et J^4 .
   b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, J^n est égale à la matrice nulle.
2) a. En utilisant la formule du binôme de NEWTON, montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{I} + \mathrm{nJ} + \frac{\mathrm{n(n-1)}}{2}\mathrm{J}^2$$

   b. En déduire alors, pour tout entier $n \geq 2$, l'expression de A^n.

3) a. Développer le produit $(\mathrm{I} + \mathrm{J})(\mathrm{i} - \mathrm{J} + \mathrm{J}^2)$.

   b. En déduire que la matrice A est inversible et préciser son inverse A^{-1} en fonction de I et J.

   c. Vérifier que l'égalité obtenue à la question 2) a. reste valable si $n = -1$.

NB :

FORMULE DU BINOME DE NEWTON

Propriété : Soient A et B deux matrices carrées du même ordre telles que : $AB = BA$

Alors pour tout entier naturel n, on a : $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$

ÉTUDE DE FONCTION

Exercice N°1

A On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par: $f(x) = -1 - xe^{\frac{x}{2}}$

1) Etudier les variations de f sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2) Donnez le signe de f sur $\mathcal{D}_f$.

B On donne la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par: $g(x) = -x + (-2x + 4)e^{\frac{x}{2}}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Calculez les limites de g aux bornes de $\mathcal{D}_g$.
2) a- Sachant que g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$, vérifier que g'(x)=f(x).
   b- Dressez le tableau de variation de g.
3) a- Démontrez que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) à $-\infty$
   b- Précisez la position relative de (C) par rapport à (Δ).
4) Tracez (C)
5) Donnez l'aire de la partie du plan limitée par (C), (Δ) et les droites d'équations x=0 et x=1